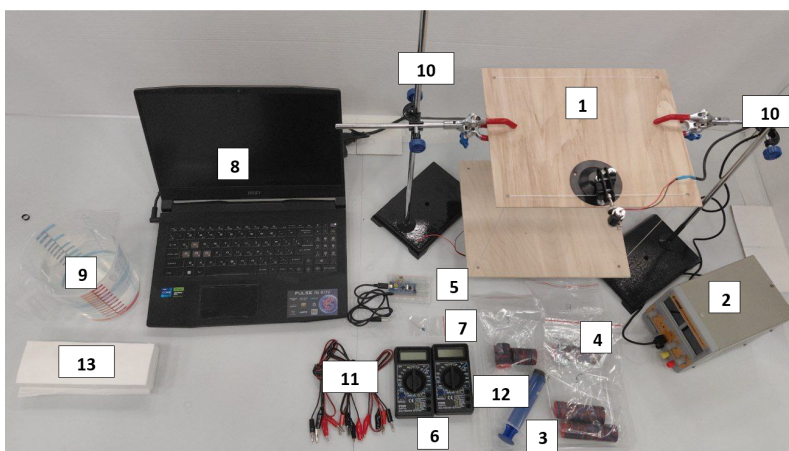


Коллективное взаимодействие

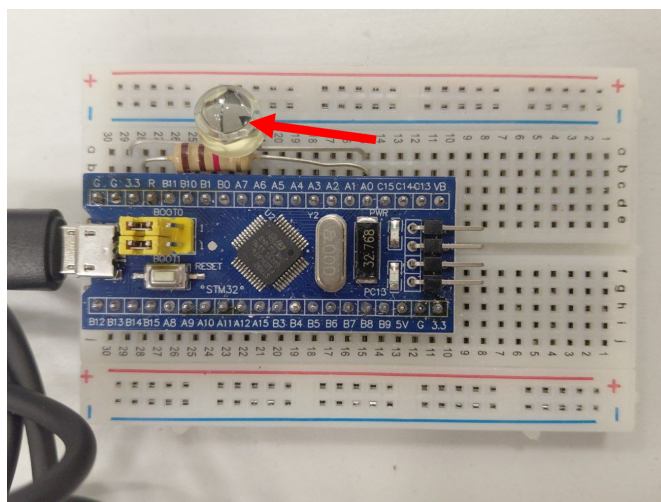
Эта задача посвящена исследованию коллективного взаимодействия магнитов, или частиц, обладающих магнитными моментами. О наличии в системе коллективного взаимодействия говорят в том случае, когда поведение и расположение частиц определяются их влиянием друг на друга. Одним из интересных эффектов, связанных с коллективным взаимодействием, является возникновение решётки магнитных моментов, похожей на кристаллическую решётку в твёрдом теле. Удивительно, что огромное количество независимых попарных взаимодействий в конечном счёте приводят к формированию *порядка* в системе.



Оборудование

1. Подвес с лазером и вентилятором-кулером (эксцентриком)
2. Источник 15 В
3. Поддон
4. Три комплекта магнитов (25 - диаметром 3 мм, 25 - диаметром 4 мм, 50 - диаметром 5 мм)
5. Макетная плата с фотодиодом, STM32 и USB-проводом
6. Два мультиметра
7. Два резистора $R = 470 \text{ Ом}$
8. Ноутбук
9. Ёмкость с водой 1.5 л
10. Два штатива
11. Три пары проводов банан-крокодил
12. Шприц 50 мл
13. Салфетки для поддержания чистоты

В предлагаемом эксперименте вы пронаблюдаете формирование плоской решётки на поверхности воды. Магнитные моменты в такой решётке ориентированы перпендикулярно её плоскости. Для вашего удобства каждый магнетик заранее помещён в центр круглой заготовки из фанеры, окрашенной с двух сторон в разные цвета, соответствующие полюсам магнетика. Вы можете складывать магнетики в стопки по два и использовать их в качестве более сильного магнита.



Увеличенная фотография макетной платы. Стрелочкой показан фотодиод.

Поддон с водой расположен на специальном подвесе с эксцентриком. Подключение эксцентрика к источнику питания возбуждает на поверхности воды волны, которые воздействуют на кружочки из фанеры. В результате хаотичного движения кружочков формируется наиболее устойчивый к внешним воздействиям порядок магнитных моментов. Высоту волн, возникающих в поддоне с водой, можно считать мерой внешнего воздействия. При слишком больших волнах порядок разрушается, происходит “плавление” решётки.

Вынимайте кружочки из воды, когда не проводите измерения с ними! Длительное нахождение фанеры в воде приводит к её намоканию.

Далее мы дадим краткое описание содержания частей задачи.

В первой части требуется исследовать закон дисперсии поверхностных волн в жидкости для характерной высоты поддона в эксперименте. После этого вы сможете рассчитывать высоту волн в поддоне в относительных единицах.

Во второй части вы исследуете решётки, формируемые магнетиками разных размеров. В зависимости от отношения их моментов энергетически выгодная геометрия решётки может изменяться. Также вы пронаблюдаете разрушение порядка при сильных волнах: “плавление” решётки.

Третья часть представляет собой компьютерную симуляцию двух других систем с частицами, обладающими магнитными моментами. Подробное описание симуляции дано в тексте задания третьей части.

Инструкция по сборке установки

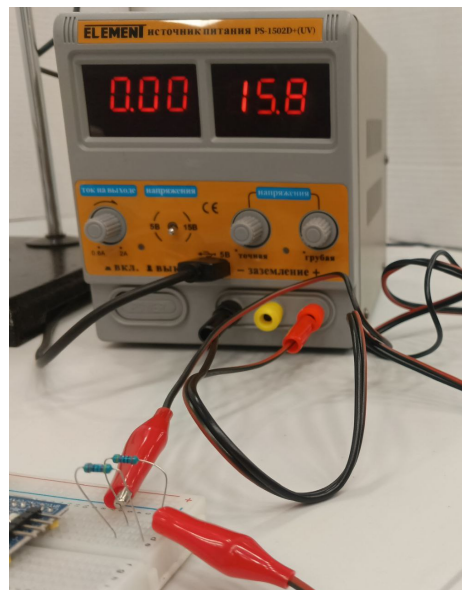
На вашем рабочем месте уже собран подвес с эксцентриком. Вам необходимо установить на него поддон, налить в поддон 1 литр воды, одновременно контролируя “горизонтальность” установки. Для этого следите за тем, чтобы поверхность воды была параллельна дну поддона. В случае необходимости разобрать установку — сначала слейте воду с помощью шприца, а затем убирайте поддон.

Внимание! Равномерное заполнение поддона (“горизонтальность” установки) необходимо контролировать в течение всего эксперимента.

Внимание! При измерении зависимостей в этой задаче начинайте с больших токов, плавно перемещаясь к малым. В случае если вентилятор не начал вращение даже при максимальном напряжении на источнике, плавно подтолкните его лопасти с утяжелителями, не нарушая “горизонтальность” установки.

Внимание! Проверьте, что ваш подвес находится на достаточном уровне от стола, но не слишком высоко. В случае проблем с вентилятором у вас должен быть удобный доступ к нему.

Внимание! Используйте источник в режиме 15 В (соответствующее положение тумблера на передней панели прибора). В работе вам необходимо подавать на кулер постоянные токи. Для этого в комплекте оборудования есть два резистора номиналом 470 Ом, которые необходимо соединить параллельно и подключить между источником и вентилятором. Будьте осторожны, резисторы могут сильно греться.



Справочные данные

- Ускорение свободного падения $g = 9.8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
- Плотность воды $\rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
- Поверхностное натяжение воды $\sigma = 73 \frac{\text{мН}}{\text{м}}$
- Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$
- Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$
- Длина стенки поддона $L = 23 \text{ см}$

Часть А. Волны на поверхности (6.0 баллов)

Закон дисперсии волн на поверхности воды в общем виде задаётся формулой:

$$\omega^2 = \left[gk + \frac{\sigma k^3}{\rho} \right] \text{th } kh,$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновой вектор; h — глубина воды; th — функция, называемая гиперболическим тангенсом. Можно считать, что $\text{th } x \approx 1$, если $x \geq 1$.

A1 Покажите, что в условиях эксперимента можно принять $\text{th } kh \approx 1$. Считайте, что длина волны λ не превосходит 10 см. **0.5**

После сделанного приближения можно получить выражение зависимости волнового вектора k от частоты ω :

$$k(\omega) = \sqrt[3]{\frac{\rho\omega^2}{2\sigma} + \sqrt{\left(\frac{\rho\omega^2}{2\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\rho g}{3\sigma}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{\rho\omega^2}{2\sigma} - \sqrt{\left(\frac{\rho\omega^2}{2\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\rho g}{3\sigma}\right)^3}}$$

В роли эксцентрика, возбуждающего колебания подвеса, выступает кулер-вентилятор. Напряжение на нём обозначим U , ток через вентилятор — I . Не забудьте подключить к источнику пару резисторов, как написано во введении.

A2 Получите выражение для мощности P , подводимой к установке. Считайте, что мощность поступает только от источника питания. **0.5**

Для дальнейших расчётов примем следующее приближение. Энергия волн, а следовательно и их высота h , пропорциональна подводимой мощности, отнесённой к количеству гребней волн, составляющих квадратную сетку в поддоне с длиной стенки L :

$$h \sim \frac{P}{(L/\lambda)^2} = \frac{P}{(kL/2\pi)^2} \sim \frac{P}{k^2}$$

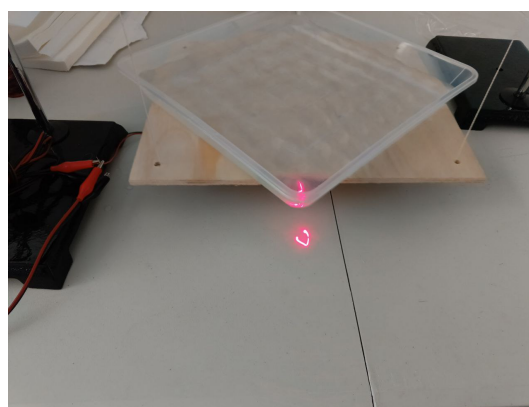
Мы будем измерять высоту волны в таких относительных единицах, чтобы её численное значение было равно P/k^2 . В эту формулу численное значение P подставляется в мВт, k — в м^{-1} .

Подайте на кулер-вентилятор максимальный ток от источника. В дальнейшем при измерении зависимостей двигайтесь в сторону уменьшения тока и лишь потом — в сторону увеличения. Инструкция по измерению частоты приведена ниже.

В процессе измерений следите за тем, чтобы стержни штативов оставались неподвижны и не колебались вместе с подвесом. Если вибрации штативов всё же происходят, аккуратно придержите стержень сверху.

Инструкция по измерению частоты

Лазерный луч, пропущенный через поддон (см. рисунок справа), рисует замкнутую фигуру на поверхности стола. Расположите фотодиод, закреплённый в макетной плате, так чтобы “поймать” часть траектории луча для измерений. Сигнал с фотодиода обрабатывается и выводится на экран ноутбука. Для измерений необходимо пользоваться программой “oscillometer.py”.



В поддоне возбуждаются стоячие волны, частота которых связана с линейными размерами поддона. Такие возбуждения называются колебательными модами системы. Ваша задача — найти не менее 4 мод системы и определить их частоты. Для этого вы можете изменять ток через кулер, вмешиваться в колебания подвеса, изменяя их амплитуду.

Обратите внимание, что далее вы работаете с частотой f , которая связана с циклической частотой следующим образом: $\omega = 2\pi f$

A3	Получите зависимость высоты волн h в относительных единицах от частоты f . Измерения проводите внутри диапазона $I \in [20; 60]$ мА. Снимите не менее 10 точек.	4.3
-----------	---	------------

A4	Постройте график зависимости $h(f)$. Загрузите скриншот графика.	0.2
-----------	---	------------

A5	Укажите численное значение частоты f_0 среди полученных мод, при котором достигается минимум высоты волн h (самая слабая мода). Ответ запишите в единицах СИ.	0.5
-----------	--	------------

Часть В. Плоские решётки (11 баллов)

В этой части мы рассматриваем систему, состоящую из магнитиков двух разных размеров. Выданные магнетики пронумерованы в порядке увеличения своей силы (по величине диаметра). Вы можете попарно чередовать используемые размеры. В решётке одинаковые магнетики должны быть повернуты в одну сторону относительно поверхности воды. Авторы предлагают ориентировать более сильные магнетики синей стороной вверх, более слабые — красной. **Обязательно придерживайтесь этого правила при выполнении эксперимента.**

Взаимодействие магнитиков, находящихся на большом расстоянии друг от друга, можно рассматривать как взаимодействие точечных магнитных диполей. Мы начнём с рассмотрения системы двух точечных электрических диполей, имеющих дипольные моменты d_1 и d_2 . Расстояние между диполями r гораздо больше их собственной длины l : $r \gg l$.

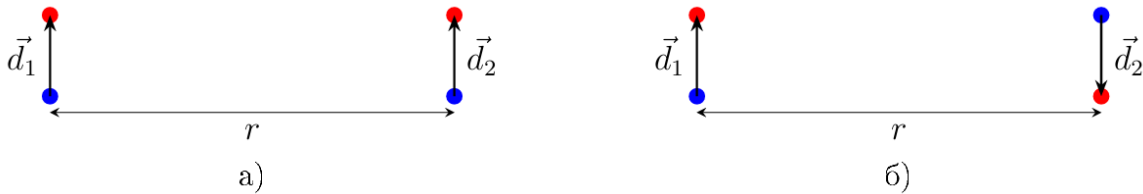


Рис. 1: Взаимное расположение диполей

Вам может понадобиться приближение $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ при $x \ll 1$

B1 Определите потенциальную энергию взаимодействия двух сонаправленных диполей (см. рис. 1а). **0.5**
 Ответ выразите через d_1 , d_2 , ε_0 и r .

B2 Определите потенциальную энергию взаимодействия двух противоположно направленных диполей (см. рис. 1б). Ответ выразите через d_1 , d_2 , ε_0 и r . **0.2**

Переход от энергии взаимодействия электрических диполей к энергии взаимодействия магнитных диполей осуществляется заменой электрической константы ε_0 на $1/\mu_0$, а дипольных моментов d_1 и d_2 на величины магнитных моментов m_1 и m_2 .

B3 Получите выражения для потенциальных энергий взаимодействия сонаправленных и противоположно направленных магнитных диполей. Ответы выразите через m_1 , m_2 , μ_0 и r . **0.3**

Теперь перейдём непосредственно к рассмотрению плоской решётки. Расстояние между соседними узлами обозначим a . Пусть момент более сильного магнетика равен m , а более слабого m/k , здесь $k \geq 1$. Наиболее выгодной в энергетическом плане может являться одна из следующих геометрий решётки:

- Магнитные моменты расположены в узлах квадратной сетки в чередующемся порядке. Изображение такой решётки представлено на рисунке 2.
- Более сильные магнетики расположены в узлах треугольной решётки, более слабые — в узлах гексагональной (шестиугольной). Изображение такой решётки представлено на рисунке 3.

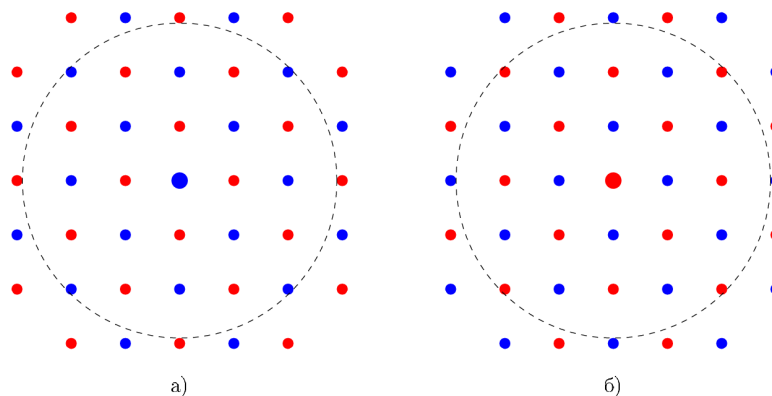


Рис. 2: Квадратная решётка

Оптимальная геометрия определяется средней энергией взаимодействия в расчёте на узел решётки. Поэтому можно ожидать, что при варьировании значения коэффициента k в эксперименте система может перестроиться. В следующих пунктах вы теоретически рассчитаете, при каком k происходит изменение геометрии решётки. Обратите внимание, что на рисунках 2 и 3 для каждого узла штриховкой выделена граница круглой области. Так как магнитное взаимодействие быстро спадает с увеличением расстояния, взаимодействием части решётки, расположенной вне этой области, с центральным узлом можно пренебречь.

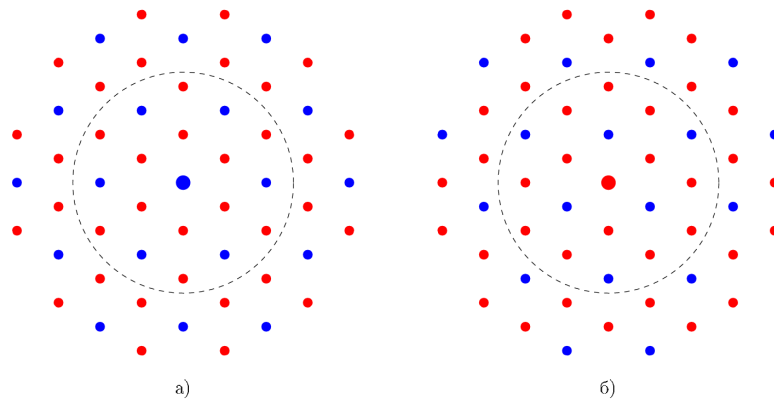


Рис. 3: Треугольно-гексагональная решётка

B4 Определите энергии взаимодействия магнитных моментов m и m/k с квадратной решёткой. Для расчётов пользуйтесь рисунками 2а и 2б. **1**

B5 Найдите среднюю энергию взаимодействия в квадратной решётке W_{sq} в расчёте на узел. **0.5**

B6 Определите энергии взаимодействия магнитных моментов m и m/k с треугольно-гексагональной решёткой. Для расчётов пользуйтесь рисунками 3а и 3б. **1**

B7 Найдите среднюю энергию взаимодействия в треугольно-гексагональной решётке W_{tr} в расчёте на узел. Учтите, что в этом типе решётки маленьких магнитиков в 2 раза больше, чем больших. **0.5**

Выражения, полученные в пунктах B5 и B7, можно рассматривать как зависимости средних энергий взаимодействия от отношения магнитных моментов k . Обезразмерим выражения для энергий W_{sq} и W_{tr} , введя величины E_1 и E_2 следующим образом:

$$W_{sq} = \frac{\mu_0 m^2}{\pi a^3} \cdot E_1$$

$$W_{tr} = \frac{\mu_0 m^2}{\pi a^3} \cdot E_2$$

Далее изучим следующие зависимости:

- для квадратной решётки — $E_1(k)$
- для треугольно-гексагональной решётки — $E_2(k)$

B8.1 Постройте графики зависимостей $E_1(k)$ и $E_2(k)$ на одном поле на участке $k > 1$. Загрузите скриншот графиков. **0.3**

B8.2 Укажите координату точки пересечения k_0 . **0.7**

Теория предсказывает, что при превышении k некоторого критического значения устойчивая геометрия решётки перестраивается. Далее вы экспериментально оцените границу этого перехода.

Разнообразие выданных магнитиков позволяет получать различные значения коэффициента k . Напомним, что разрешается складывать магнитики в стопки по два. В решётке одинаковые магнитики должны быть повернуты в одну сторону относительно поверхности воды. Авторы предлагают ориентировать более сильные магнитики синей стороной вверх, более слабые — красной. **Обязательно придерживайтесь этого правила при выполнении эксперимента.**

Для измерений используйте наиболее слабую моду, найденную в пункте A5. Решётка оптимального размера содержит от 10 до 15 магнитиков.

В9 Для всех значений k из таблички ниже экспериментально определите геометрию устойчивой решётки. В ответах для каждого k укажите число, соответствующее решетке:

4

1. квадратная
2. треугольно-гексагональная
3. трудноопределяемая.

В10 Оцените критическое значение коэффициента k_0^{exp} , считая его натуральным числом.

0.5

Теперь исследуем процесс “плавления” решётки при возбуждении разных колебательных мод в поддоне. Характерными признаками начала “плавления” являются

- существенные изменения в геометрии решётки
- отщепление отдельных магнитиков
- наезд магнетиков друг на друга

В следующем пункте будет исследовано “плавление” квадратных решёток с $k = 1$. Качественные наблюдения проведите для решётки из магнитиков 3 мм, решётки из магнитиков 4 мм и решётки из магнитиков 5 мм. Не используйте стопки из магнитиков. Ответ укажите для наиболее сильной из найденных в пункте А3 моды, наиболее слабой из найденных в пункте А3 моды и ещё для одной моды на ваш выбор.

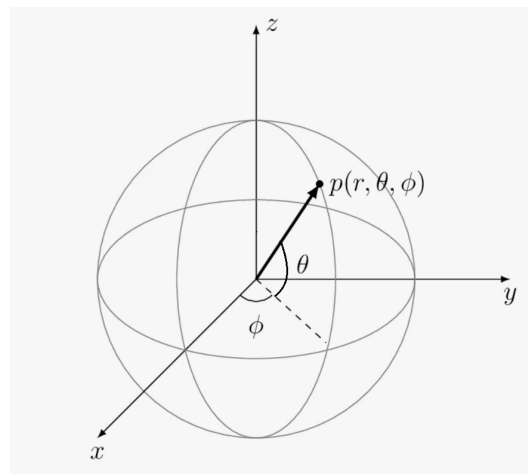
В11 Для каждой моды определите, происходит ли “плавление” вышеуказанных решёток. В ответе укажите качественно наблюдаемый результат: происходит или не происходит.

1.5

Часть С. Симуляция (3 балла)

Для работы с симуляцией запустите программу “simulation.py”.

Направления координатных осей в симуляции отображаются в отдельном окошке, расположенном под основным меню с кнопками. Положение наблюдателя относительно области симуляции описывается парой углов φ и θ , как показано на рисунке. Наблюдатель находится в точке p , удалённой от области симуляции.



В первой симуляции моделируется взаимодействие сонаправленных магнитных моментов, расположенных в одной плоскости Oxy . В систему добавлено поверхностное натяжение: каждая единица площади, занимаемой магнитиками, обладает поверхностной энергией. В таких условиях решётка стремится к геометрии с максимально плотной упаковкой узлов.

На картинке выше изображены различные типы плоских решёток:

1. квадратная сетка на рисунке 4а
2. треугольная сетка на рисунке 4б
3. гексагональная (шестиугольная) сетка на рисунке 4в

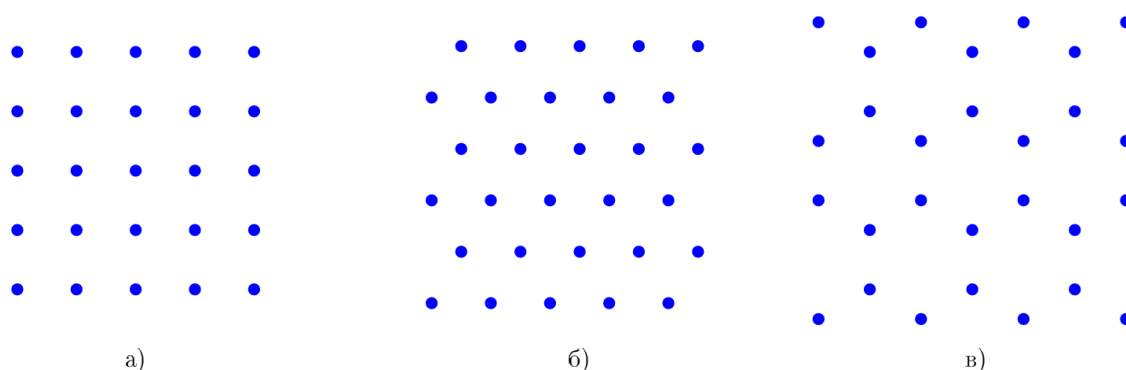


Рис. 4: Геометрия плоских решёток

Вам необходимо провести симуляцию описанной системы и определить тип образовавшейся решётки магнитных моментов. Работу с симуляцией начинайте с высоких температур. Затем квазистатически (медленно) охлаждайте систему, меняя параметры в интерфейсе программы. Учтите, что для установления теплового равновесия в симуляции требуется время!

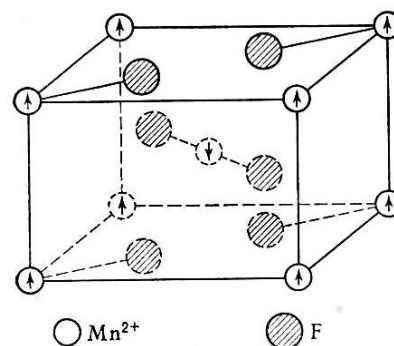
C1 Проведите симуляцию и введите число, равное номеру образовавшейся решётки (1-3) в соответствии с рисунком 4.

0.5

Во второй симуляции моделируется система, похожая на кристаллическую решётку антиферромагнетика. Магнитные моменты выступают аналогом спинов атомов решётки. Краткое описание понятия спина приведено далее.

Спины в антиферромагнетиках

Атомы любого вещества, а также их ионы обладают характеристикой, называемой спином. Магнитный момент атома $\vec{m}$ пропорционален его спину $\vec{s}$. В некоторых веществах, таких как оксид марганца(II) MnO или фторид марганца(II) MnF_2 , соседние ионы тяжёлых металлов стремятся иметь противоположно направленные спины. Такие вещества называются антиферромагнетиками. Структура антиферромагнетика на примере фторида марганца(II) с указанием направления спинов представлена на рисунке справа.



При рассмотрении спинов в антиферромагнетике возникает понятие *обменного взаимодействия*, тесно связанное с квантовой механикой. Выражение для энергии обменного взаимодействия в модели Гейзенберга имеет вид:

$$E_0 = -J \sum_{\langle i,j \rangle} (\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j)$$

где $\langle i,j \rangle$ в индексе суммы означает суммирование по парам ближайших соседей. Симуляция построена на основе этой модели. Константа J называется обменным интегралом, и в случае антиферромагнетиков $J < 0$.

Иногда для удобства описания обменного взаимодействия вводят понятие эффективного обменного поля $\vec{h}$, имеющего магнитную природу. Энергия спина $\vec{s}$ в таком поле может быть записана как:

$$E_0 = -g (\vec{s} \cdot \vec{h})$$

где g — константа пропорциональности между магнитным моментом и спином иона.

В нашей симуляции “спин” может иметь всего два направления: вдоль оси z и против оси z , поэтому система обладает выделенным направлением. Магнитные моменты, направленные вдоль оси z , выделены синим цветом, против оси z — красным цветом. Синие и красные частицы несут на себе положительный

заряд, как и ионы тяжёлых металлов в антиферромагнетике. Отрицательно заряженные частицы отмечены белым цветом. “Спины” в симуляции формируют разновидность кубической решётки.

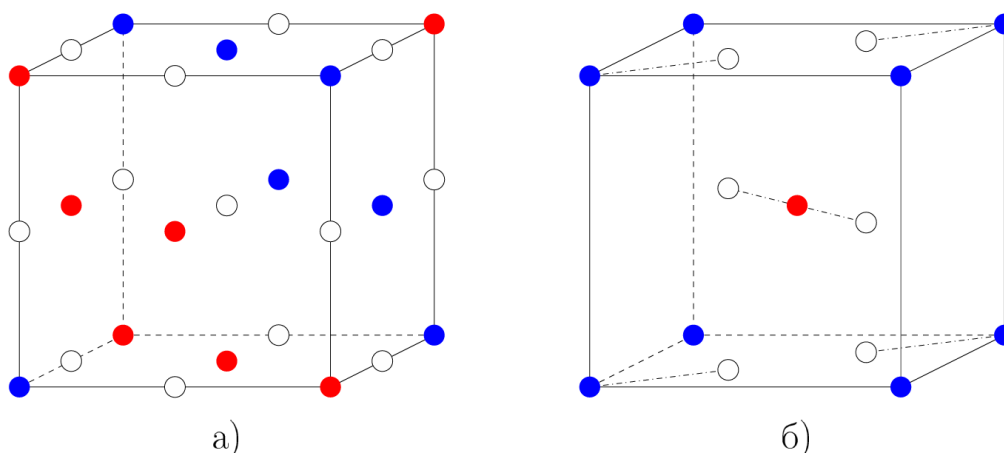


Рис. 5: Геометрия кубических решёток

На картинке выше изображены различные кубические решётки:

1. гранецентрированная кубическая решётка на рисунке 5а
2. объёмно-центрированная кубическая решётка на рисунке 5б

Вам необходимо провести симуляцию описанной системы и определить тип образовавшейся решётки магнитных моментов. Работу с симуляцией начинайте с высоких температур. Затем квазистатически (медленно) охлаждайте систему, меняя параметры в интерфейсе программы. **Учтите, что для установления теплового равновесия в симуляции требуется время!**

- C2** Проведите симуляцию и введите число, равное номеру образовавшейся решётки в соответствии с рисунком 5.

1

В процессе работы с симуляцией вы могли заметить, что рёбра решётки не параллельны осям прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$. Для пункта С3 установите параметр $N = 5$ в симуляции.

- С3** Изменяя положение наблюдателя в симуляции, определите углы, которые рёбра кубической ячейки решётки составляют с осью z . В ответе укажите три числа из диапазона $[0, 90]^\circ$ в порядке возрастания.

1.5