

ФЛЮИДИН

За свою историю человечество построило множество различных тепловых машин, которые работают по совершенно разным циклам. В этой задаче мы рассмотрим флюидин – разновидность двигателя Стирлинга, где в качестве рабочего тела выступает газ, а в качестве поршней – жидкость.

Флюидин состоит из трех вертикальных трубок, заполненных водой. Площадь поперечного сечения A у них совпадает, высота уровня равна L . Пара трубок соединена сверху, и внутри системы находится воздух объемом $2AL$ при атмосферном давлении p_0 . Вода несжимаема и ее плотность равна ρ .

Мы будем анализировать механическую систему, поведение которой описывается системой линейных дифференциальных уравнений. Такая система уравнений имеет замечательное свойство, если все величины зависят от времени по закону $x(t) = X_0 e^{\lambda t}$, то система дифференциальных уравнений сводится к системе алгебраических уравнений на X_0 и λ .

Простейшим примером такой системы является уравнение пружинного маятника:

$$ma = -\alpha v - kx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Если подставить в него предложенную ранее зависимость, то получается алгебраическое уравнение на λ :

$$X_0 \lambda^2 e^{\lambda t} + X_0 \frac{\alpha}{m} e^{\lambda t} + X_0 \frac{k}{m} e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \frac{\alpha}{m} \lambda + \frac{k}{m} = 0.$$

Будем решать это уравнение с помощью дискриминанта:

$$\mathcal{D} = \frac{\alpha^2}{m^2} - \frac{4k}{m}.$$

Если $\mathcal{D} < 0$, то у уравнения на λ не существует действительных корней, но здесь нам на помощь приходит математический трюк. Допустим, что существует число i , такое что $i^2 = -1$. Тогда можно сказать, что

$$\lambda = \frac{-\frac{\alpha}{m} \pm \sqrt{\mathcal{D}}}{2} = \frac{-\frac{\alpha}{m} \pm \sqrt{-i^2 \mathcal{D}}}{2} = \frac{-\frac{\alpha}{m} \pm i \sqrt{-\mathcal{D}}}{2}.$$

и

$$\tilde{x}(t) = X_0 e^{\left(-\frac{\alpha}{2m} \pm i \frac{\sqrt{-\mathcal{D}}}{2}\right)t} = X_0 e^{-\frac{\alpha}{2m}t} \cdot e^{\pm i \frac{\sqrt{-\mathcal{D}}}{2}t}.$$

Волна над x используется, чтобы показать, что был проведен трюк с i . Но от $\tilde{x}(t)$ можно перейти к настоящему $x(t)$ если заменить экспоненту, в показателе которой стоит $i \cdot \omega t$, на косинус ωt :

$$x(t) = X_0 e^{-\frac{\alpha}{2m}t} \cdot \cos\left(\pm \frac{\sqrt{\mathcal{D}}}{2}t\right)$$

Имейте в виду, что если колебания смещены во времени, т.е. $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \phi)$, то величину ϕ называют фазой и при записи в форме экспоненты мы имеем $\tilde{x}(t) = X_0 e^{i\omega t + i\phi}$. Это может быть очень удобно, так как вместо косинуса сумма фаз проявляет себя как множитель.

Часть А. Механика жидкости (5.7 баллов)

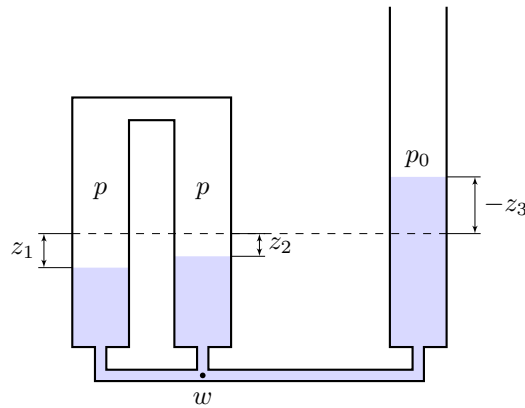
Допустим эта система вышла из равновесия и уровни воды в трубках сместились вниз на малые величины z_1, z_2 и z_3 .

A1 Запишите уравнение связи между z_1, z_2 и z_3 .

0.6

Если система вышла из равновесия, то давление во всех точках системы может измениться. При этом будем считать, что внутри воздушной полости давление однородно и равно $p = p_0 + \Delta p$, $|\Delta p| \ll p_0$. Давление в точке w обозначим p_w и это давление тоже слабо отличается от своего равновесного значения: $p_w = p_0 + \rho g L + \Delta p_w$, $|\Delta p_w| \ll p_0$. Пренебрегайте влиянием соединительных трубок на механику системы.

На воду внутри каждой из трубок действуют следующие силы: сила тяжести, разность сил давлений и сила вязкого трения.



- A2** Запишите выражение для силы тяжести, действующей на воду внутри первой трубки. Ответ выразите через ρ , g , A , z_1 и L . **0.6**

- A3** Запишите выражение для разности сил давления, действующей на воду внутри первой трубки. Ответ выразите через ρ , g , L , A , Δp и Δp_w . **0.6**

Существует выражение, которое известно, как формула Пуазейля. Если по горизонтальной трубе длиной l и радиусом r течет вода и разность давлений между концами трубы ΔP , то объемный расход $Q = \dot{V}$ воды через нее выражается, как

$$Q = \frac{\Delta P \pi r^4}{8 \eta l},$$

где η – вязкость воды.

- A4** Запишите выражение для силы вязкого трения, действующей со стороны стенок первой трубки на воду внутри первой трубки. Ответ выразите через η , L и $\dot{z}_1$ **1.5**

- A5** Запишите второй закон Ньютона для воды внутри каждой из трубок (всего три уравнения). Получите выражения типа **1.2**

$$a\ddot{z} + b\dot{z} + cz = \dots$$

Исключим из системы уравнений Δp_w . Для этого будем вычитать уравнения друг из друга

- A6** Получите выражение типа **0.3**

$$a(\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2) + b(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + c(z_1 - z_2) = \dots$$

- A7** Получите выражение типа **0.3**

$$a(\ddot{z}_1 - \ddot{z}_3) + b(\dot{z}_1 - \dot{z}_3) + c(z_1 - z_3) = \dots$$

- A8** Пользуясь пунктом A1, исключите z_3 из выражения написанного в пункте A7. Другими словами, перепишите выражение через z_1 , z_2 и их производные. **0.6**

Пусть все величины меняются по закону $e^{\lambda t}$:

$$z_1 = z_{1,0}e^{\lambda t}, \quad z_2 = z_{2,0}e^{\lambda t}, \quad \Delta p = \Delta p_0 e^{\lambda t}$$

- A9** Подставьте экспоненциальный закон в выражения из пунктов A6 и A8. Получите систему алгебраических уравнений, связывающих $z_{1,0}$, $z_{2,0}$, Δp_0 и λ . **0.6**

Часть В. Термодинамика газа (4.3 балла)

Мы ищем режим работы, когда в системе происходят колебания. При этом давление воздуха внутри полости

$$p(t) = p_0 + \Delta p(t) = p_0 + \Delta p_0 \cos \omega t,$$

а объем газа внутри полости

$$V(t) = 2AL + \Delta V(t) = 2AL + \Delta V_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Введем

$$K = \frac{\Delta p_0}{p_0} \frac{V_0}{\Delta V_0} > 0$$

В1 Получите среднюю мощность тепловой машины W .
 Ответ выразите через Δp_0 , ΔV_0 , ω и φ .

1.8

Максимальная мощность достигается при $\varphi = \pi/2$. В таком случае, если заменить косинусы на экспоненты, то

$$\Delta \tilde{p}(t) = \Delta p_0 e^{i\omega t}, \quad \Delta \tilde{V}(t) = \Delta V_0 e^{i\omega t + i\varphi}, \quad \frac{\Delta \tilde{p}(t)}{\Delta \tilde{V}(t)} = \frac{\Delta p_0}{\Delta V_0} e^{-i\varphi}.$$

Можно показать, что $e^{-i\pi/2} = -i$, и тогда

$$\frac{\Delta \tilde{p}(t)}{\Delta \tilde{V}(t)} = -i \frac{\Delta p_0}{\Delta V_0}.$$

Другими словами, предполагая наличие колебаний таких, что $\varphi = \pi/2$, в уравнениях для пункта А9 можно записать, что

$$\Delta p_0 = -i \frac{p_0}{2L} (z_{1,0} + z_{2,0}) \cdot K.$$

В2 Пользуясь выражениями из пункта А9, получите уравнение вида

0.4

$$(z_{1,0} + z_{2,0}) \cdot (a\lambda^2 + b\lambda + c) = -iK(z_{1,0} + z_{2,0})$$

В этом уравнении можно сократить $(z_{1,0} + z_{2,0})$ и получится квадратное уравнение на λ :

$$a\lambda^2 + b\lambda + c + iK = 0$$

Для дальнейшего анализа будет удобным перейти к безразмерной величине: $x = \lambda \sqrt{L/g}$.

В3 Запишите квадратное уравнение на x в виде

0.4

$$ax^2 + bx + c + iK = 0.$$

Будем использовать, что $p_0 = 100$ кПа, $\rho = 1.00$ г/см³, $L = 10.0$ см, $A = 1$ см², $\eta = 1.00 \cdot 10^{-3}$ Па · с, $g = 9.8$ м/с².

Известно, что для $u, v > 0$ корень из $-u - iv$ вычисляется по формуле:

$$\sqrt{-u - iv} = \sqrt{u^2 + v^2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\arctan \frac{v}{u}}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\arctan \frac{v}{u}}{2} \right) \right]$$

В4 При каком минимальном положительном значении K флюидин начинает работать?

1.7